

ظاهرة الانحلال في مشاكل النقل (تجنب وقوعها _ أساليب علاجها)

• عبد الله محمد الشيخ • وهاجر أحمد الشريف • وإمحمد مصطفى بازينة •

ملخص

تعتبر ظاهرة الانحلال من أهم المعوقات التي تحول دون الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل النقل، في هذه الورقة سيتم دراسة هذه المعضلة من أجل تقديم حلول مناسبة لهذه المشكلة، وذلك من محورين، في المحور الأول سيتم اقتراح أساليب تمكننا من تجنب وقوع هذه الظاهرة في كلا خطوتي الحل (عند وضع الجدول المبدئي وعند إعداد جداول التحسين)، وذلك باختيار الطريقة المناسبة في إعداد الجدول المبدئي أو عن طريق تحديد أولويات الخلايا المستخدمة في شحن الجدول، أما في المحور الثاني سيتم اقتراح طرق ملائمة تمكننا من الوصول إلى الحل الأمثل في ظل وجود هذه الظاهرة وذلك في حالة عجز الطرق المستخدمة في المحور في تجنب وقوعها.

الكلمات الدالة: البرمجة الخطية، نماذج النقل، الحل المبدئي، ظاهرة الانحلال، مضلع التحسين المقترح، درجات الانحلال.

1- مقدمة

برمجيات الحاسب الآلي، ذلك بسبب طول الفترة الزمنية التي يستغرقها الحاسب في بحثه عن الحل الأمثل التي قد تصل إلى عقود من الزمن، وفي هذه الحالات تستخدم أساليب تحسين أخرى تسمى (Heuristic Methods) وهي أساليب تقريبية (Approximate Methods)، وفيها يتم البحث عن حل مناسب يكون قريب من الحل الأمثل Near Optimal خلال فترة زمنية محددة، ويتجلى استخدام أساليب التحسين هذه عند حل مشاكل تحديد المواقع في الفراغ المستمر Location Problems in the Continuous Space.

بصفة عامة خطوات الحل باستخدام أسلوب بحوث العمليات Operational Research Methods، يمكن أن تقسم إلى مرحلتين أساسيتين، في الأولى يتم وضع حل مبدئي Initial Solution للمشكلة، وفي المرحلة الثانية تبدأ عملية تحسين الحل Optimization Process، وهي عملية البحث عن حل أفضل من الحل المبدئي، وذلك باستخدام أساليب رياضية أو إحصائية معينة، ويتطلب الوصول إلى الحل الأمثل Optimal solution أو الأقرب إلى الأمثل Near Optimal تكرار عملية التحسين هذه عدة مرات، وعادة في

يعتبر علم بحوث العمليات (Operational Research OR) من أهم العلوم التطبيقية التي أحرزت انتشاراً واسعاً في كافة مجالات الحياة، فهي تستخدم في حل المشاكل الواقعية المعقدة التي طبيعتها معطياتها معلومات كمية، وذلك باستخدام نماذج مختلفة تعتمد في أساسها على أساليب رياضية وإحصائية، الأمر الذي يجعل نتائجها على درجة عالية من الدقة. تنوع هذه المشاكل أدى إلى تعدد نماذج بحوث العمليات Operational Research Models بما يتناسب مع طبيعة هذه المشاكل، بتطبيق هذه النماذج يمكن تحديد الحل الأمثل للمشكلة. من أهم هذه النماذج: البرمجة الخطية (Linear programming LP) والبرمجة الديناميكية (Dynamic programming DP) ونظرية المباراة (Game Theory) ونماذج النقل (Transportation Models)... الخ. قد تكون هذه النماذج على درجة عالية من التعقيد وتتضمن عمليات حسابية مطولة ومتداخلة، وقد تحتاج هذه العمليات إلى التكرار لعدد كبير جداً من المرات، الأمر الذي عنده يتعذر الوصول إلى الحل الأمثل حتى في ظل استخدام.

المستخدمة في تحديد الحل الأمثل لنماذج النقل، وهي محل الدراسة في هذه الورقة.

كما سبق الذكر فإن مشكلة النقل تعتبر حالة خاصة من البرمجة الخطية، ونموذجها الرياضي لا يختلف كثيراً عن الصيغة العامة للبرمجة الخطية، والذي هو عبارة عن دالة هدف (Objective Function) وقيود (Constraints)، والذي يميز نموذج النقل عن الصيغة العامة للبرمجة الخطية هو أن دالة الهدف في نموذج النقل تهدف دائماً للتقليل (Minimization) في حين أن دالة الهدف في الصيغة العامة يمكن أن تهدف أيضاً إلى التعظيم (Maximization)، كما أن كل قيودها عبارة عن معادلات (تحمل إشارة =)، في حين أن القيود بالصيغة العامة يمكن أن تحمل أي من الإشارات التالية (\leq ، $=$ ، \geq)، ويكون النموذج الرياضي لمشكلة النقل كالتالي (JURAJ, 2014: 59):

$$\text{Minimize } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad (\text{دالة الهدف})$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{قيود العرض})$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{قيود الطلب})$$

$$\sum_{j=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m b_j \quad (\text{قيود تساوي الكمية المطلوبة والمعروضة})$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\text{شرط عدم السلبية})$$

حيث أن:

X_{ij} = عدد الوحدات المنقولة من المصدر (المصنع) i إلى نقاط الطلب (المخزن) j .

C_{ij} = تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع i إلى المخزن j .

a_i = الطاقة الإنتاجية للمصنع i .

b_j = القدرة الاستيعابية للمخزن j .

i = عدد المصانع ($i = 1, 2, \dots, m$).

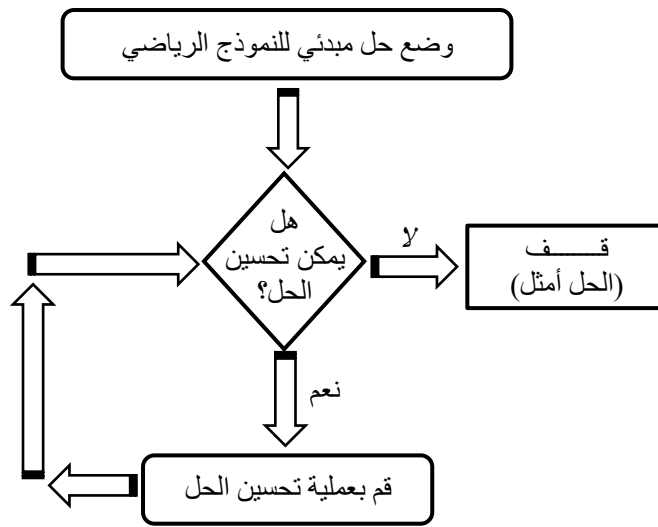
كل مرة يتحسن الحل، وعملية التحسين التالية تبدأ من أفضل حل (Best Solution) تم الوصول إليه، إلا أن الوصول إلى الحل الأمثل قد يتطلب تكرار عملية التحسين لعدد كبير جداً من المرات، الذي يجعل الحاسب الآلي يستغرق وقتاً طويلاً جداً كما أشرنا سابقاً. ومن جهة أخرى يتعدى أحياناً تكرار عمليات التحسين هذه؛ بسبب ظهور بعض الحالات الخاصة التي تسمى بحالة الانحلال (Degeneracy) التي تكون عائقاً أمام الوصول إلى الحل، وتتجلى ظاهرة الانحلال في البرمجة الخطية بصفة عامة وفي نماذج النقل بصفة خاصة.

في هذه الورقة سيتم دراسة وتحليل ظاهرة الانحلال في نماذج النقل، للتغلب على حالات الانحلال، ويكون ذلك من محورين، في الأول سيتم تقديم بعض الأساليب التي تُجنبنا الوقوع في ظاهرة الانحلال أصلاً، وذلك عند وضع الجدول المبدئي وعند إعداد جداول تحسين الحل، إلا أنه تبين في بعض الحالات أنه لا يمكن تجنب حدوث الانحلال، وهنا تبرز أهمية المحور الثاني، وهو اقتراح بعض الأساليب التي تمكننا من الاستمرار في عملية الحل في حالة عدم إمكانية تجنبها. وقبل الخوض في تحليل هذه الظاهرة سيتم تقديم عرض موجز لمشاكل النقل.

2- مشاكل النقل:

تهدف نماذج النقل لتحديد الخطة المثلى لنقل عنصرٍ ما، من مصدرٍ ما Source أو عددٍ من المصادر (نقاط العرض)، إلى جهةٍ ما Destination أو عددٍ من الجهات (نقاط الطلب) من أجل ضغط التكاليف الكلية للنقل عند أقل نقطة لها (Optimal Cost). تُنسب فكرة نماذج النقل للعالم الرياضي هيتشكوك (Hitchcock) التي قدمها سنة (1941)، وفي سنة 1948 قدم العالم جورج دانتزك (George Dantzig) طريقة السمبلكس Simplex Method التي أبهر بها العالم والتي تستخدم في حل نماذج البرمجة الخطية بصفة عامة، وقد استخدمت في حل مشاكل النقل باعتبارها حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية، ثم قدم دانتزك في سنة (1951) طريقة التوزيع المعدل (Modified Distributing Method) والمختصة في حل نماذج النقل، وفي سنة (1954) اكتشفت شارنس وكوبر طريقة جبر التنقل (Stepping Stone Method)، التي تعتبر أيسر الطرق

إن عملية حل النموذج الرياضي Mathematical Model في مشاكل النقل تعتمد على ثلاث خطوات أساسية، في البداية يتم إعداد الجدول المبدئي Initial Tableau للمشكلة والذي يمثل الحل المبدئي Initial Solution، ثم تأتي مرحلة اختبار المثالية (Optimality Test)، وأخيراً عملية التحسين (Process Optimization)، ويتم تكرار هذه الخطوات حتى يتم التوصل للحل الأمثل (Optimal Solution)، ويمكن توضيح آلية عمل هذه الخطوات بناءً على الرسم التخطيطي التالي المتمثل في الشكل رقم (1) لهذه الورقة.



شكل (1) خطوات حل نموذج النقل

تحسين الحل؟ فإذا كانت الإجابة بـ لا، فهذا يعني أن هذا الحل هو الحل الأمثل للمشكلة ويتم التوقف عن إجراءات الحل، أما إذا كانت الإجابة بـ نعم يتم الانتقال للخطوة التالية وهي عملية تحسين الحل. من أبسط الطرق المستخدمة في اختبار الحل هي طريقة حجر التنقل (Stepping Stone Method)، ويتم ذلك عن طريق اختبار كل الخلايا الغير مشحونة، وذلك برسم مضلع تكون رؤوسه خلايا مشحونة باستثناء الخلية المراد اختبارها، بعد ذلك يتم حساب دليل التحسين (جمع التكاليف الموجودة على رؤوس المضلع مع مراعاة إشارات خلايا رؤوس المضلع - أو +)، إذا تبين أن قيم دليل التحسين لكل الخلايا التي تم اختبارها (الخلايا الغير

$j = 1, 2, \dots, n$ = عدد المخازن

وكما سبق الذكر، يوجد عدة طرق يمكن استخدامها لحل هذا النموذج: كطريقة السمبلكس (Simplex Method) وطريقة التوزيع المعدلة (Modified Distributing Method) وطريقة حجر التنقل (Stepping Stone Method) والتي تعتبر أبسطها ومحل الدراسة.

2-1 خطوات حل النموذج الرياضي لمشاكل النقل:

• إعداد الحل المبدئي:

الحل المبدئي لمشكلة النقل عبارة عن جدول (مصفوفة) من نوع $(m \times n)$ ، ويوجد ثلاثة طرق متعارف عليها لإعداد الحل المبدئي (تعبئة الجدول) وهي طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة أقل تكلفة (Least Cost Method) والأخيرة طريقة فوجل التقريبية (Vogel's Approximation Method) تسمى هذه الطريقة أيضاً بطريقة الجزاء (Method (Penult).

• اختبار المثالية (Optimality Test):

في هذه الخطوة يتم فحص الحل لمعرفة ما مدى إمكانية تحسينه، بعبارة أخرى يتم الإجابة على السؤال التالي: هل يمكن

مشحونة) قيم موجبة، فهذا يعني أن هذا الحل لا يمكن تحسينه وهو الحل الأمثل للمشكلة (Optimal Solution)، أما إذا تبين أن خلية ما أو أكثر كانت قيمة دليل تحسينها قيمة سالبة، فهذا يعني أن هذا الحل ليس حلاً أمثلاً، وبالتالي يجب الانتقال للخطوة التالية:

• عملية تحسين الحل:

وفقاً لطريقة حجر التنقل (قيد الدراسة) يتم تحسين الحل عن طريق شحن الخلية التي دليل تحسينها أكبر قيمة سالبة، ومن تم إعادة توزيع الكميات بجدول النقل مع المحافظة على توازن الجدول، وذلك باستخدام مضلع اختبار تلك الخلية. ثم يتم إعادة اختبار مثالية الحل مرة أخرى وتحسين الحل إذا تطلب ذلك، وتستمر هذه الحلقة حتى يتم الوصول للحل الأمثل.

3- مشكلة الدراسة:

هنالك بعض الحالات الخاصة أو الظواهر التي تواجهها بعض أساليب بحوث العمليات وتكون هذه الظواهر عائقاً أمام الوصول للحل الأمثل، من بين هذه الحالات ظاهرة الانحلال التي تواجهها البرمجة الخطية بصفة عامة ونماذج النقل بصفة خاصة، في هذه الورقة سيتم دراسة هذه الظاهرة في نماذج النقل، فهي تكون عائقاً أمام مرحلة اختبار مثالية الحل، وبالتالي عدم إمكانية تحسينه، ففي ظل وجود هذه الظاهرة لا يمكن إيجاد مضلع لكل الخلايا الغير مشحونة، بحيث تكون كل رؤوسه خلايا مشحونة باستثناء الخلية المراد اختبارها، وتحدث هذه الظاهرة عندما يكون عدد الخلايا المشحونة بجدول النقل أقل من $(m + n - 1)$ ، حيث إن (m) هي عدد صفوف الجدول (عدد نقاط العرض) و (n) تمثل عدد أعمدة الجدول (عدد نقاط الطلب). والجدير بالذكر أيضاً هو أن حالة الانحلال يمكن أن تظهر أثناء القيام بالخطوة الأولى من الحل، وهي مرحلة إعداد الحل المبدئي (وضع الجدول المبدئي) ويمكن أن تظهر أيضاً في المرحلة الأخيرة من الحل وهي مرحلة تحسين الحل (إعداد جداول التحسين). عند دراسة وتحليل هذه الحالة، تبين أن وقوع هذه الظاهرة يرتبط بوجود أحد العاملين التاليين في مشكلة النقل:

عندما تساوى الطاقة الإنتاجية لإحدى نقاط العرض (المصانع) مع القدرة الاستيعابية لإحدى نقاط الطلب (المخازن)، وبالتالي عند شحن الخلية التي عندها تتساوى الطاقة الإنتاجية للمصنع مع القدرة الاستيعابية، يتم قفل باقي خلايا صف وعمود تلك الخلية في ذات الوقت، وطبعاً هذا له تأثير سلبي على عدد الخلايا التي سيتم شحنها بالجدول، بمعنى أن عدد الخلايا المشحونة بالجدول ستكون أقل من $(m + n - 1)$ ، وهذا بدوره يؤدي إلى ظهور حالة الانحلال. في حين أنه في الحالة الاعتيادية (الطاقة الإنتاجية \neq) الطاقة الاستيعابية) يتم قفل باقي خلايا الصف أو باقي خلايا العمود فقط (أيهما أقل)، وقد أشار (الجنابي، 2010) إلى ذلك.

عندما تكون القيمة المتبقية من عملية شحن خلية ما، مساوية لكمية العمود أو الصف المناظر للخلية الجاري شحنها، بمعنى آخر إن هذه الحالة يمكن أن تظهر في الحالة الاعتيادية، أي أنه يتم إقفال صف أو عمود عند شحن خلية لا تتساوى فيها الطاقة الإنتاجية المناظرة لها مع القدرة الاستيعابية، وبالتالي عند الانتقال لشحن خلية أخرى يكون فيها حاصل جمع هذا الفارق مع الطاقة الإنتاجية المناظر للخلية الجديدة مساوياً للطاقة الاستيعابية أو العكس (الفارق + القدرة الاستيعابية = الطاقة الإنتاجية)، يتم إقفال صف وعمود الخلية الجديدة معاً في نفس الوقت، وهذا بدوره يؤدي إلى انخفاض عدد الخلايا المشحونة عن $(m + n - 1)$ ، الذي يؤدي إلى ظهور حالة الانحلال. ولمزيد من المعلومات عن هذه الظاهرة، يمكن الرجوع إلى الورقة المقدمة إلى المجلة العلمية المحكمة (دراسات في الاقتصاد والأعمال/ كلية الاقتصاد مصراتة) والتي توضح الظاهرة ومسبباتها واختلاف وجهات النظر حول إمكانية تحسين الحل في ظل وجودها.

4- الدراسة التحليلية:

هنا سيتم دراسة وتحليل معضلة الانحلال التي تواجهها مشاكل النقل، وذلك بغرض البحث في إمكانية تفادي وقوعها من ناحية وإيجاد حل لهذه المعضلة من ناحية أخرى، بمعنى آخر سنقترح بعض الأساليب التي تُجنبنا الوقوع في حالة الانحلال التي

الحل المبدئي (تعبئة الجدول المبدئي)، وهي طريقة الزاوية الشمالية الغربية و طريقة أقل تكلفة وطريقة (فوجل) التقريبية، وكل طريقة تختلف عن الأخرى من حيث تحديد الخلية التي يجب شحنها أولاً، بعبارة أخرى إذا تم استخدام طريقة ما في إعداد الجدول المبدئي وأفضت إلى حالة الانحلال، فهذا لا يعني بالضرورة أن استخدام طريقة أخرى سيؤدي إلى حالة الانحلال أيضاً، وبذلك يمكن تجنب حالة الانحلال إذا بتغيير الطريقة المستخدمة في إعداد الجدول المبدئي، فمثلاً إذا تم استخدام طريقة فوجل وتبين أن هذه الطريقة تؤدي إلى ظاهرة الانحلال، فهذا لا يعني بالضرورة أن استخدام طريقة أقل تكلفة وطريقة الزاوية الشمالية الغربية سيؤدي إلى ظاهرة الانحلال والعكس صحيح أيضاً. ويمكن إثبات ذلك من خلال مشكلة النقل التالية بالجدول رقم (1).

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	2 ² 18	3 /	4 ⁴ 2	5 ⁵ /	20
x_2	5 ⁵ /	1 ¹ 15	6 ⁶ /	3 ³ /	15
x_3	7 ⁷ /	10 ¹⁰ /	3 ³ /	5 ⁵ /	8
x_4	8 ⁸ /	2 ¹ 2	5 ³ 5	6 ⁶ /	7
	18	17	10	5	50

جدول 1 (b): عدم ظهور حالة الانحلال عند إعداد الجدول المبدئي بطريقة أقل تكلفة الغربية

تكون عائقاً أمام الوصول للحل الأمثل، وفي حالة تعذر ذلك سيتم تقديم بعض الأساليب التي تمكننا من تحسين الحل وصولاً للحل الأمثل في ظل وجودها، وذلك عن طريق تقديم بعض الأساليب التي لم تطرح أو تناقش على الأقل حسب علمنا في الكتب المتاحة. ويمكن تصنيف هذه الأساليب بناءً على مكان ظهورها، أي عند أعداد الجدول المبدئي أو أثناء أعداد جداول التحسين، وذلك كالتالي:

4-1 عند إعداد الجدول المبدئي:

يمكن أن تظهر حالة الانحلال عند أعداد الجدول المبدئي وذلك بناءً على ما ذكر، ويمكن علاجها إحدى الطرق التالية:

• استخدام أكثر من طريقة عند إعداد الجدول المبدئي:

كما تم الذكر سابقاً هنالك ثلاثة طرق متعارف عليها لإعداد

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	2 ² 18	3 ³ 2	4 ⁴ /	5 ⁵ /	20
x_2	5 ⁵ /	1 ¹ 15	6 ⁶ /	3 ³ /	15
x_3	7 ⁷ /	10 ¹⁰ /	8 ⁸ /	7 ⁷ /	8
x_4	8 ⁸ /	1 ¹ 2	3 ³ 5	6 ⁶ /	7
	18	17	10	5	50

جدول 1 (a): حالة انحلال عند إعداد الجدول المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية

• تجنب شحن الخلية التي تؤدي إلى ظهور حالة الانحلال عند إعداد الجدول المبدئي:

إن استخدام الفكرة السابقة (استخدام أكثر من طريقة في إعداد الجدول المبدئي) لا يمكن أن يؤدي إلى تفادي جميع حالات الانحلال، بعبارة أخرى هنالك حالات تحدث فيها الظاهرة رغم استخدام جميع الطرق المتعارف عليها في إعداد الجدول المبدئي، وبالتالي فإن استخدام الفكرة السابقة لا يفضي إلى

إن إعداد الجدول المبدئي لمشكلة النقل السابقة باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية أدى إلى حدوث ظاهرة الانحلال، حيث أن عدد الخلايا المشحونة (6) وهي أقل من $m + n - 1 = 7$ كما هو موضح بالجدول 1 (a)، إلا أن استخدام طريقة أقل تكلفة في إعداد الجدول المبدئي للمشكلة نفسها، لم يفضي إلى ظهور الحالة، فعدد الخلايا المشحونة في الجدول هو (7) وهذا يساوي $(m + n - 1 = 7)$ كما يتضح بالجدول 1 (b).

الجدول 2 (a) و 2 (b) و 2 (c) تم أعداد الجدول المبدئي استخدام كافة الطرق، حيث كان عدد الخلايا المشحونة بالجدول الثلاثة (6) وهي أقل من $(m + n - 1 = 7)$.

تجنب كل حالات الانحلال. والمثال التالي يوضح ذلك، ففي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة أقل تكلفة وطريقة (فوجل) على التوالي، ويتبين أن الظاهرة وقعت عند

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	18 ²	2 ³	4	5	20
x_2	5	15 ¹	6	3	15
x_3	7	10	3 ⁷	5 ⁷	8
x_4	8	5	7 ³	6	7
	18	17	10	5	50

جدول 2 (c): الحل المبدئي باستخدام طريقة فوجل

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	18 ²	2 ³	4	5	20
x_2	5	15 ¹	6	3	15
x_3	7	10	3 ⁷	5 ⁷	8
x_4	8	5	7 ³	6	7
	18	17	10	5	50

جدول 2 (b): الحل المبدئي باستخدام طريقة أقل تكلفة

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	18 ²	2 ³	4	5	20
x_2	5	15 ¹	6	3	15
x_3	7	10	8 ⁷	7	8
x_4	8	5	2 ³	5 ⁶	7
	18	17	10	5	50

جدول 2 (a): الحل المبدئي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية

في الوقت ذاته. في حين أن حالة الانحلال هذه قد تم تجنبها، ولم تظهر في الجدول 3 (b)، وذلك بعد أن تم تجنب شحن هذه الخلية (x_2y_2) والانتقال لشحن الخلية التي تليها (x_2y_3) ثم العودة لشحن الخلية السابقة (x_2y_2) ، وبهذا تم تجاوز حالة الانحلال.

نؤكد هنا أن تجاوز شحن خلية ما لأي سبب كان يمكن أن يؤدي إلى ظهور حل مبدئي آخر، يختلف عن الحل في حالة عدم التجاوز، والجدير بالذكر هنا أنه ليس بالضرورة أن يكون الحل المبدئي الجديد (في حالة تجنب شحن الخلية) ذو تكلفة أعلى، بمعنى أنه حل مختلف بنفس إجمالي التكلفة أو بتكلفة أعلى أو بتكلفة أقل، والمهم هنا هو الحصول على حل مبدئي قابل للتحسين وصولاً للحل الأمثل.

من أجل تفادي هذا العجز الذي يصاحب الفكرة السابقة، يمكن اللجوء إلى استخدام أسلوب آخر وهو أن الخلية التي تحدث حالة الانحلال (تقف صف وعمود في الوقت نفسه) يتم تجنب شحنها والانتقال إلى الخلية التي تليها ولا تحدث حالة انحلال، فمثلاً عندما تواجهنا خلية تحدث انحلال عند استخدام طريقة أقل تكلفة، نتجنب شحن هذه الخلية وننتقل لشحن الخلية التي تليها في التكلفة ثم نعود بعد ذلك لشحن تلك الخلية إذا أمكن ذلك، وإذا لم نتمكن من ذلك نستمر في تعبئة الجدول بشكل طبيعي. يمكن توضيح ذلك باستخدام المثال التالي والممثل في الجدول 3 (a)، حيث تم استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية في إيجاد الجدول المبدئي، ويلاحظ أن الخلية (x_2y_2) قد أحدثت حالة الانحلال عند إقفال الصف (x_2) والعمود (y_2)

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	18 ²	2 ³	4	5	20
x_2	5	5 ¹	10 ⁶	3	15
x_3	7	8	10 ⁷	7	8
x_4	8	2 ⁵	3	5 ⁶	7
	18	17	10	5	50

جدول 3 (b): عدم ظهور حالة الانحلال بعد تجنب شحن (x_2y_2) عند تطبيق طريقة الزاوية الشمالية الغربية

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	18 ²	2 ³	4	5	20
x_2	5	15 ¹	6	3	15
x_3	7	10	8	7	8
x_4	8	5	2 ³	5 ⁶	7
	18	17	10	5	50

جدول 3 (a): ظهور حالة الانحلال عند تطبيق طريقة الزاوية الشمالية الغربية

4-2 معالجة ظاهرة الانحلال عند إعداد جداول تحسين الحل:

كما سبق الذكر فإن حالة الانحلال يمكن أن تظهر عند إعداد الجدول المبدئي أو عند إعداد جداول التحسين. في الفقرة السابقة (1.4) تم توضيح كيفية التغلب على ظاهرة الانحلال عند إعداد الجدول المبدئي، في هذه الفقرة سيتم توضيح كيفية التغلب على ظاهرة الانحلال عند إعداد جداول التحسين، ويمكن إنجاز هذا أيضاً تطبيق عدد 2 من الأساليب وهي كالتالي:

• تجنب شحن الخلية التي تؤدي إلى ظهور حالة الانحلال عند إعداد جداول التحسين:

فكرة تجنب شحن الخلية التي تسبب حدوث الانحلال (تقلل صف وعمود في ذات الوقت) التي استخدمت عند إعداد

الجدول المبدئي، يمكن استخدامها هنا أيضاً لتجنب ظهور حالة الانحلال عند إعداد جداول التحسين، بعبارة أخرى في حالة وجود أكثر من خلية غير مشحونة يمكن استخدامها (شحنها) في تحسين الحل، فإذا تبين أن استخدام إحدى هذه الخلايا في تحسين الحل يمكن أن يؤدي إلى ظهور حالة انحلال، فهنا يجب تجنب استخدام هذه الخلية والانتقال لاستخدام إحدى الخلايا الأخرى. ويمكن استخدام المثال التالي والممثل في الجدول رقم (4) في توضيح ذلك، ففي هذا الجدول تم إيجاد الحل المبدئي للمشكلة باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية ولا وجود لحالة الانحلال هنا. يتبين من هذا أنه يوجد عدد (2) خلايا غير مشحونة يمكن استخدامها في تحسين الحل، وهذه الخلايا هي:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	10 15	2 10	8 5	6 6	30
x_2	4 6	6 6	9 15	2 6	15
x_3	11 6	6 6	5 8	10 6	15
	15	10	25	10	60

جدول 4: استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية

في إعداد الجدول المبدئي

الكلية ستخضع بمقدار (5) وحدات عن كل وحدة واحدة يتم شحنها في الخلية (x_2y_4) .

أن استخدام الخلية الأولى (x_2y_1) في تحسين الحل والتي دليل تحسينها يحتوي على أكبر قيمة سالبة (-7) سيؤدي إلى تحسين الحل بشكل أكبر، إلا أن استخدام هذه الخلية (x_2y_1) في تحسين الحل سيؤدي إلى ظهور حالة الانحلال كما يتضح في الجدول 5 (a)، في حين أن استخدام الخلية (x_2y_4) في تحسين الحل لم يفض إلى حدوث انحلال، كما يتضح ذلك في الجدول 5 (b).

الخلية الأولى (x_2y_1) : مضلع اختبار هذه الخلية هو (x_2y_3) ، وبهذا يتم حساب دليل التحسين بجمع التكاليف الموجودة على رؤوس المضلع مع مراعاة الإشارات كالتالي $(-7 = -9 + 8 - 10 + 4)$ ، وهذا يعني أن كل وحدة واحدة يتم شحنها بهذه الخلية تخفض في التكلفة الكلية بمقدار 7 دينار.

الخلية الثانية (x_2y_4) : مضلع اختبار هذه الخلية هو $(x_2y_4, x_2y_3, x_3y_3, x_3y_4)$ وبهذا يتم أيضاً حساب دليل التحسين بجمع التكاليف الموجودة على رؤوس المضلع وهي $(-5 = -6 + 8 - 9 + 2)$ ، وهذا يعني أن التكلفة

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	10	3	8	6	30
x_2	4	6	9	2	15
x_3	11	6	8	6	15
	15	10	25	10	60

جدول 5 (b): عدم ظهور حالة الانحلال عند

تحسين الحل بواسطة الخلية (x_2y_4)

من شروط مصلع الاختبار في الحالة الاعتيادية هو أن تكون كل رؤوس المصلع خلايا مشحونة باستثناء الخلية المراد شحنها، كما هو موضح بالجدول 4 (a)، الذي يبين مصلع اختبار الخلية (x_1y_4) مع تحديد إشارة كل خلية $[(x_1y_3) - (x_1y_2), + (x_3y_3), - (x_2y_4), + (x_1y_4)]$. في حين أنه يشترط في المصلع المقترح من قبلنا في ظل حالة الانحلال لاختبار الخلايا الغير مشحونة أن تكون رؤوس المصلع ذات الإشارة السالبة فقط هي خلايا مشحونة، أما خلايا رؤوس المصلع ذات الإشارة الموجبة لا يشترط فيها أن تكون خلايا مشحونة، كما هو موضح بالجدول 4 (b)، الذي يبين مصلع اختبار الخلية (x_1y_1) مع إشارة كل خلية $[(x_2y_1) -, + (x_2y_2), - (x_1y_2), + (x_1y_1)]$.

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	10	3	8	6	30
x_2	4	6	9	2	15
x_3	11	6	8	6	15
	15	10	25	10	60

جدول 4 (b): جدول مبدئي يحتوي على مصلع

اختبار الخلية (x_1y_1) في الحالة الغير اعتيادية

لكل خلية غير مشحونة لمعرفة مدى إمكانية تحسين الحل إذا تم شحن هذه الخلية، بعبارة أخرى يتم معرفة ماذا يحدث إذا ما تم نقل كمية من خلية مشحونة ووضعها في خلية غير

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	10	3	8	6	30
x_2	4	6	9	2	15
x_3	11	6	8	6	15
	15	10	25	10	60

جدول 5 (a): ظهور حالة الانحلال عند تحسين

الحل بواسطة الخلية (x_2y_1)

• الاستمرار في حل النموذج في ظل ظاهرة الانحلال:

ليس دائماً يمكن تجنب حالة الانحلال في جداول التحسين باستخدام الطريقة السابقة، بعبارة أخرى قد لا يوجد خيار في تحديد الخلية المشحونة في تحسين الحل، فهناك حالات لا يوجد فيها إلا خلية واحدة يمكن استخدامها في تحسين الحل، استخدام هذه الخلية قد يفضي إلى انحلال الحل، وهذا يعني عجز الطريقة السابقة في تجنب حالة الانحلال، لذلك رأينا أنه يجب تقديم أسلوب آخر لمعالجة هذه الحالات الخاصة.

عند المزيد من البحث والتحليل في ظاهرة الانحلال، تبين أنه يمكن الاستمرار في الحل وفي ظل وجود ظاهرة الانحلال من خلال اختبار الخلايا غير المشحونة بعمل مصلع يختلف عن المصلع المستخدم في الحالة الاعتيادية (حالة عدم الانحلال).

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	10	3	8	6	30
x_2	4	6	9	2	15
x_3	11	6	8	6	15
	15	10	25	10	60

جدول 4 (a): جدول مبدئي يحتوي على مصلع

اختبار الخلية (x_1y_4) في الحالة الاعتيادية

لتوضيح فكرة استخدام مصلع الاختبار بالشكل المقترح من قبلنا، يجب أولاً توضيح الهدف من وراء استخدام فكرة مصلع اختبار الخلايا الغير مشحونة. طبعاً يتم إنشاء مصلع اختبار

ظاهرة الانحلال أو مدى شدة ظاهرة الانحلال عند تغطيته ومناقشته في الفقرة التالية:

- درجة الانحلال:

إن حالة الانحلال تنشأ عندما تكون عدد الخلايا المشحونة أقل من $(m + n - 1)$ ، والجدير بالذكر هنا أيضاً، هو أن عدد الخلايا المشحونة يمكن أن تقل عن هذا المقدار $m + n - 1$ بمقدار وحدة واحدة أو بمقدار وحدتين أو بثلاثة وحدات... إلخ، وهذه هي درجات أو شدة الانحلال التي نقصدها. والسؤال الذي يطرح نفسه هنا، ما هي أقصى درجات الانحلال؟ أو بعبارة أخرى ما هو أقل عدد من الخلايا المشحونة يمكن أن يتحقق أثناء شحن جدول النقل؟ ويمكن الإجابة على هذا السؤال بناءً على التحليل التالي:

إن أدنى درجة من درجات الانحلال تتحقق عندما يكون عدد الخلايا المشحونة أقل من $(m + n - 1)$ بمقدار وحدة واحدة فقط، بمعنى آخر تظهر هذه الدرجة عندما تكون هنالك خلية واحدة فقط تقضي إلى الانحلال عند شحنها (تعلق صف وعمود في ذات الوقت)، وإن أعلى درجة من درجات الانحلال تتحقق عندما تؤدي كل خلية من خلايا الجدول يتم شحنها إلى الانحلال، وما بين هاتين الحالتين المتطرفتين تتدرج باقي درجات الانحلال، وحتى نتمكن من تحديد درجات الانحلال رياضياً نستخدم الفرضيات التالية:

في ظل وجود مشكلة نقل عدد صفوفها (m) وعدد أعمدها (n) ، وإن $(m \geq n)$ ، ويمكن تطبيق ما سيلبي ثباته في حالة العكس أيضاً، أي عندما تكون $(m \leq n)$:

كما سبق الذكر، في الحالة الاعتيادية (عدم وجود انحلال) تكون عدد الخلايا المشحونة تساوي $(m + n - 1)$ ، ويمكن التعبير عن درجات الانحلال بتغيير العدد الثابت (1) بمتغير آخر، لكي نتمكن من توضيح ذلك نقوم باستبدال العدد الثابت (1) بالمتغير (i) ، وبما أن أقل درجة من درجات الانحلال تحدث عندما تكون عدد الخلايا المشحونة أقل من $(m + n - 1)$ بمقدار وحدة واحدة، عليه فإنه في هذه الحالة (أقل درجات الانحلال) تحدث عندما تكون قيمة (i) عند أدنى قيمة لها (Min_i) ويكون ذلك عندما $(i = 1)$. كما أن أعلى

مشحونة. هل يتحسن الحل أم لا؟، فإذا كانت الإجابة بـ نعم يتم تطبيق ذلك عن طريق شحنها بأكبر قدر ممكن لغرض تحسين الحل، أما إذا كانت الإجابة بـ لا لكل الخلايا الغير مشحونة (لا يوجد أي خلية غير مشحونة يمكنها أن تحسن الحل)، فهذا يعني أن هذا الحل هو الحل الأمثل للمشكلة. ويمكن استخدام الجدول 4 (a) لتوضيح ذلك، فقد تم رسم مضع اختبار الخلية (x_1, y_4) والتي بطبيعة الحال ستكون إشارتها موجبة (+)، مما يعني أنه يجب إضافة 5 وحدات إلى هذه الخلية (5) وهي أقل كمية تحمل إشارة سالبة)، وبهذا طبعاً سيحدث اختلال في توازن العمود (y_4) والصف (x_1) ، ومن أجل إعادة التوازن للعمود (y_4) يجب طرح الكمية نفسها (5) من الخلية (x_3, y_4) ، وهذا بدوره يحدث اختلال في الصف (x_3) ، ولإعادة التوازن في هذا الصف (x_3) يجب إضافة الكمية نفسها (5) إلى الخلية (x_3, y_3) ، وهذا طبعاً سيؤدي إلى اختلال التوازن في العمود (y_3) ، ولإعادة توازن العمود (y_3) يجب طرح ذات الكمية (5) من الخلية (x_1, y_3) والذي بدوره أيضاً يعيد التوازن للصف (x_1) .

من التوضيح السابق يمكن التأكيد على أن الخلايا التي تحمل إشارة موجبة ليس بالضرورة أن تكون خلايا مشحونة، لأنه فيها يتم إضافة كمية إلى الخلية، أما في الخلايا التي تحمل إشارة سالبة فإنه يجب أن تكون الخلية مشحونة، لأنه فيها يتم خصم كمية من الخلية، ففي حالة الخلية الفارغة (غير المشحونة) لا يمكن أن نقوم بعملية الخصم لأن الخلية فارغة وفي حالة الخصم منها ستصبح كمية تلك الخلية سالبة، وهذا يتعارض مع قيد عدم السلبية، وعلى هذا الأساس فإن المضع المقترح من قبلنا يجب أن تكون فيه الخلايا التي تحمل إشارة سالبة هي فقط الخلايا المشحونة أما الموجبة ليس بالضرورة أن تكون كذلك. والسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو: هل يمكن إيجاد مضع اختبار (حسب المضع المقترح) لكل الخلايا الغير مشحونة؟

وللإجابة على هذا السؤال يجب دراسة وتحليل جانب آخر من جوانب ظاهرة الانحلال والذي لم تتم مناقشته من قبل أي من المؤلفين على حسب علمنا، ونظراً لأن هذا الموضوع يعتبر جديداً ولم تتم دراسته من قبل سيتم استخدام مصطلح درجة

خلية يتم قفل صف وعمود (إذا توفر كليهما وإلا سيتم قفل المتاح منها)، فمثلاً عند استخدام الزاوية الشمالية الغربية تكون الخلايا المشحونة كالتالي:

درجات الانحلال تنشأ عندما تكون قيمة (i) عند أقصى قيمة لها (Max_i) ، وهذا يحدث عندما يتم قفل صف وعمود في ذات الوقت عند شحن كل خلية في الجدول، وبما أن $(m \geq n)$ فإن عدد الخلايا المشحونة تكون m ، وذلك لأنه عند شحن كل

	y_1	y_2	y_3	
x_1	10 30	3	8	30
x_2	4	5 15	1	15
x_3	11	6	8 25	25
x_4			8 5	5
	30	15	30	70

جدول 6: جدول مبدئي باستخدام الزاوية الشمالية الغربية عند أقصى درجات الانحلال

وبناءً على ما سبق يمكن تحديد القيم الطرفية (العظمى والصغرى) للمتغير (i) والتي قيمتها $1 \leq i \leq n$ أي أن $i = (1, \dots, n)$ ، وبهذا يتم تحديد درجات الانحلال بناءً على قيمة المتغير (i) ، وتكون القيم الطرفية (العظمى والصغرى) للمتغير (i) كالتالي:

- القيمة الصغرى للمتغير i تساوي الواحد الصحيح $(Min_i = 1)$

- القيمة العظمى للمتغير i تساوي n (عدد الأعمدة) لأن $(m \geq n)$ وبالتالي تكون $(Max_i = n)$

وعليه تُحدد درجات الانحلال بناءً على قيمة المتغير (i) كالتالي:

- حالة عدم وجود انحلال: تحدث هذه الحالة عندما يكون المتغير $(i = 1)$ وهي أقل قيمة للمتغير $(Min_i = 1)$ ، وبذلك تكون عدد الخلايا المشحونة $(m + n - 1)$ $= (m + n - i)$.

- أدنى درجات الانحلال: تحدث هذه الحالة عندما تكون عدد الخلايا المشحونة أقل من $(m + n - 1)$ بمقدار وحدة واحدة، بعبارة أخرى يحدث ذلك عندما تكون قيمة المتغير

تكون عدد الخلايا المشحونة عند أقصى درجات الانحلال تساوي (m) وعليه ستكون $(i = n)$ ، ويمكن إثبات ذلك كالتالي:

لبرهنة إن (i) تساوي (n) عند أعلى درجات الانحلال، عليه سنفرض إن $(i = n)$ ونطبق هذا في قانون عدد الخلايا المشحونة $(m + n - i)$ ، وذلك بالتعويض عن قيمة (i) بدلالة (n) ، فإذا ثبت بعد التعويض إن عدد الخلايا المشحونة يساوي (m) ، فهذا يعني طبعاً إن افتراضنا صحيح:

عدد الخلايا المشحونة عند أعلى درجات الانحلال $(m + n - i) = m$ كما سبق توضيحه، عليه نقوم بالتعويض عن قيمة (i) بدلالة (n) في هذا القانون $(m + n - i)$

$$\therefore (n) = i$$

$$\therefore m = (m + n - n)$$

$$m = m$$

وهذا يعني أنه عند أقصى درجات الانحلال تكون $(i = n)$ عند الحد الأقصى للانحلال وهو أعلى درجات الانحلال (Max_i) تكون عدد الخلايا المشحونة تساوي (m) .

الانحلال الأخرى، عليه هنا سنقوم بإثبات وجود المضلع في أقصى درجات الانحلال وذلك كالتالي:

في أقصى درجات الانحلال يكون هنالك خلية مشحونة في كل صف وفي كل عمود، وهذا يعني إمكانية إيجاد مضلع لكل خلية غير مشحونة، وذلك لأنه لكل خلية غير مشحونة يوجد خلية مشحونة في صفها وأخرى في الصف الذي يعلوها وأخرى في الصف الأدنى منها، كما هو موضح بالجدول السابق (جدول 6)، وهذا يؤكد إمكانية إيجاد المضلع المقترح (كل رؤوسه السالبة خلايا مشحونة).

ويمكن توضيح فكرة استخدام المضلع المقترح في تحسين الحل في ظل ظاهرة الانحلال باستخدام الجدول رقم 7 (a) الذي يوضح الحل المبدئي لمشكلة نقل لا تتضمن حالة انحلال، إلا أنه عند تحسين الحل عن طريق الخلية (x_2y_1) تظهر حالة الانحلال كما هو موضح بالجدول رقم 7 (b). والذي يعني عدم إمكانية تحسين الحل باستخدام الطريقة الاعتيادية (لا يمكن إيجاد مضلع كل رؤوسه خلايا مشحونة)، لذلك قمنا بالاستمرار في عملية تحسين الحل (في ظل وجود الانحلال)، وذلك عن طريق استخدام فكرة المضلع المقترح $[(x_2y_4), -(x_3y_4), +(x_3y_1), -(x_2y_1)]$ في اختبار الخلية (x_2y_4) ، حيث كان حاصل جمع دليل التحسين قيمة سالبة $-2 = -(2), +(4), -(6), +(2)$ كما هو موضح بالجدول رقم 7 (c).

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	10	3	8	6	30
x_2	5	2	5	2	15
x_3	10	4	6	6	15
	15	10	25	10	60

جدول 7 (c): تحسين الحل في ظل

الانحلال باستخدام المضلع المقترح للخلية

(x_2y_3)

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	10	3	8	6	30
x_2	15	2	5	2	15
x_3	4	6	5	10	15
	15	10	25	10	60

جدول 7 (b): ظهور ظاهرة الانحلال عند

جدول تحسين الحل باستخدام الخلية

(x_2y_1)

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	15	3	8	6	30
x_2	2	5	9	2	15
x_3	4	6	5	10	15
	15	10	25	10	60

جدول 7 (a): الحل المبدئي لمشكلة نقل

في حالة عدم ظهور الانحلال

$(i = 2)$ وبذلك تكون عدد الخلايا المشحونة $(m + n - 2)$ $(m + n - i) =$

- **أقصى درجات الانحلال:** تنشأ أعلى درجات الانحلال عندما تكون قيمة المتغير عند أقصى قيمة لها (Max_i) ، وذلك عندما تكون قيمة $(i = n)$ وهي عند أعلى قيمة للمتغير (n) $(Max_i =$ وبذلك تكون عدد الخلايا المشحونة: $(m + n - i) = (m + n - n) = m$.

وبناءً على ما سبق ذكره تكون قيمة (i) محصورة بين 1 و n والتي على أساسها يمكن تلخيص درجات الانحلال كالتالي:

$$1 \leq i \leq n, \quad i = (1, \dots, n)$$

- عندما $(i = 1)$ لا يوجد انحلال $(m + n - 1)$ حيث إن $(Min_i = n)$.

- عندما $(i = 2)$ أقل درجات الانحلال $(m + n - 2)$.

-

-

- عندما $(i = n)$ أعلى درجات الانحلال $(m + n - Max_i)$ حيث إن $(Max_i = n)$.

تبين أن هنالك عدة درجات من الانحلال، والسؤال الذي يطرح نفسه هنا، هل يمكن إيجاد المضلع المقترح لكل الخلايا الغير مشحونة وفي كل درجات الانحلال؟

إذا تم إثبات إمكانية إيجاد المضلع المقترح في أقصى درجات الانحلال، هذا يعني أنه يمكن إيجاد المضلع عند درجات

3. الشيخ، أبو القاسم حسن (2009). بحوث العمليات، المجموعة للنشر والتوزيع.
4. الصفدي، محمد سالم (1999). بحوث العمليات تطبيق وخوارزميات، دار وائل للنشر، عمان.
5. الكبيسي، موفق (1999). بحوث العمليات، دار حامد، الأردن.
6. المنصوري، محمود محمد (1996). أساليب بحوث العمليات واستخداماتها في ترشيد القرارات.
7. العتوم، شفيق (2005). بحوث العمليات، دار المناهج عمان.
8. الفضل، مؤيد (2010). المنهج الكمي في اتخاذ القرارات المثلي، اليازوري العلمية للنشر والتوزيع عمان.
9. الفياض، محمود، وعيسى قعادة (2007). بحوث العمليات، دار اليازوري، عمان.
10. الموسوي، عبد الرسول عبد الرزاق (2009). المدخل إلى بحوث العمليات، دار وائل، عمان.
11. النعيمي، محمد عبد العال، ورفاه شهاب الحمداني، وأحمد شهاب الحمداني (2011). بحوث العمليات، ط2 دار وائل للنشر والتوزيع.
12. حمدان، فتحي خليل (2010). بحوث عمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب، دار وائل، عمان .
13. صبري، عزام (2003). أساسيات في بحوث العمليات. عالم الكتب الحديث الأردن.
14. طعمة، حسين ياسين، ومروان حسين البنور، وإيمان حسين حنوس (2009). بحوث العمليات نماذج وتطبيقات ، دار الصفاء، عمان.
15. عبيدات، سليمان خالد (2015). الأساليب الكمية في الإدارة، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان.
16. علي، حسين، ومؤيد الفضل، ونجاح إبراهيم (1999). بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة، دار زهران عمان.

5- الخلاصة:

في بداية هذه الورقة تم تقديم ملخص موجز عن بحوث العمليات ونماذجها، وتلاها تقديم عرض لمشاكل النقل والخطوات الواجب اتباعها عند حلها، بالإضافة إلى توضيح مفصل لظاهرة الانحلال التي تكون عائقاً أمام الوصول للحل الأمثل. أما بالنسبة للنتائج التي تم التوصل إليها في هذه الورقة فيمكن تبويبها في نقطتين: في النتيجة الأولى تم تقديم أسلوبين نتمكن من خلالهما من تجنب حدوث ظاهرة الانحلال أصلاً، في الأول يتم استخدام الطريقة المناسبة في إعداد الجدول المبدئي من بين الطرق الثلاثة المتعارف عليها، وفي الأسلوب الثاني تم تقديم فكرة أخرى، وهي تجنب شحن الخلية التي يمكن أن تؤدي إلى حدوث ظاهرة الانحلال. أما بالنسبة للنتيجة الثانية لهذه الورقة فتبرز في حالة عجز الطريقتين السابقتين عن تجنب وقوع ظاهرة الانحلال، وذلك عن طريق اقتراح فكرة جديدة في تحديد طبيعة مضع اختبار الخلايا الغير مشحونة، وذلك بالشكل الذي يمكن من الاستمرار في الحل في ظل وقوع ظاهرة الانحلال، وهذا كان دافعاً قوياً لطرح جانب آخر من جوانب ظاهرة الانحلال للدراسة والتحليل، لم يتم مناقشته من قبل، وتم استخدام مصطلح درجات الانحلال لمعرفة ما هي مدى درجة أو شدة الانحلال وما تأثيرها على الفكرة المقترحة في حل المشكلة.

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية

1. الجنابي، محمود حسين (2010). الأحدث في بحوث العمليات، دار حامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
2. الجواد، دلال، وصادق الفتال (2008). بحوث العمليات، دار اليازوري، عمان.

ثانياً: المراجع الأجنبية

1. FREDERICK S. HILLIER, GERALD J. LIEBERMAN. 2000. Introduction to Operations Research Education 7th ed. McGraw-Hill Higher Education, New York.
 2. JURAJ STACHO. 2014. Introduction to Operations Research Deterministic Models 7th ed, Columbia University, New York.
 3. Rama Murthy STACHO. 2007. Operations Research, 2th ed. New AGE international, New Delhi.
 4. Hamdy A. Taha. 2007. Operations Research AN Introduction 8th ed. Pearson prentice hall, New Jersey.
 5. www.pondiuni.edu.in/storage/dde/downloads/mbaii_qt (PM11:15-3/7/2016)
17. فرحات، حيدر محمد، ومحمد سليمان عواد (1998). بحوث العمليات النظرية والتطبيق، دار الفكر، عمان.
 18. كعبور، محمد (1992). أساسيات بحوث العمليات، كلية المحاسبة، غريان.
 19. مرجان، سليمان محمد (2002). بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية بنغازي، ليبيا.
 20. الشيخ عبدالله محمد، الشريف، وبازينة، إمحمد مصطفى، والشريف، هاجر أحمد (2015). الانحلال في نماذج النقل: مسيبتها واختلاف وجهات النظر حول إمكانية تحسين الحل في وجودها، مجلة دراسات في الاقتصاد والأعمال، المجلد (3)، العدد (2)، ص ص 36-46.